

УДК 62.505

Г.О. ДИМОВА, В.С. ДИМОВ

Херсонський національний технічний університет

ПРОЕКЦІЙНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянута можливість знаходження структури оператора динамічного об'єкта за його вихідним сигналам на основі структурних властивостей лінійних операторів та впорядкування множини вихідних сигналів, поданих у вигляді ганкелевих форм і ганкелевих матриць. Згідно з евристичним підходом вхідний сигнал діє на об'єкт, при цьому здійснюється збір інформації про всі ступені свободи динамічного некерованого об'єкта. Таким вхідним сигналом, що має нескінченний спектр, є білий шум. Розглянуто методiku знаходження структури оператора і оцінку його параметрів для лінійного випадку та метод ідентифікації моделі багатомірної динамічної системи. Розроблені методи знаходження моделі динамічної системи, що задається тільки вихідним сигналом, та визначення характеристик динамічної системи на відміну від відомих процесів, описаних задачами ідентифікації, управління і вимірювання.

Ключові слова: динамічна система, оператор, обернена задача, лінійний простір, векторний часовий ряд, ганкелеві матриці, розкладність матриці, ранг матриці, базис простору

А.О. ДЫМОВА, В.С. ДЫМОВ

Херсонский национальный технический университет

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассмотрена возможность нахождения структуры оператора динамического объекта по его выходным сигналам на основе структурных свойств линейных операторов и упорядочения множества выходных сигналов, представленных в виде ганкелевых форм и ганкелевых матриц. Согласно эвристическому подходу входной сигнал действует на объект, при этом осуществляется сбор информации обо всех степенях свободы динамического неуправляемого объекта. Таким входным сигналом, имеющим бесконечный спектр, является белый шум. Рассмотрена методика нахождения структуры оператора и оценка его параметров для линейного случая, а также метод идентификации модели многомерной динамической системы. Разработаны методы нахождения модели динамической системы, которая задается только выходным сигналом, и определения характеристик динамической системы, в отличие от известных процессов, описанных задачами идентификации, управления и измерения.

Ключевые слова: динамическая система, оператор, обратная задача, линейное пространство, векторный временной ряд, ганкелевы матрицы, разложимость матрицы, ранг матрицы, базис пространства

H.O. DYMOVA, V.S. DYMOV

Kherson National Technical University

PROJECTIONAL RESEARCH METHODS OF THE REVERSE PROBLEM OF LINEAR DYNAMIC SYSTEMS

The possibility of finding the structure of an operator of a dynamic object from its output signals on the basis of the structural properties of linear operators and the ordering of

<https://doi.org/10.32782/2618-0340-2019-3-17>

a set of output signals presented in the form of Hankel forms and Hankel matrices is considered. According to the heuristic approach, the input signal acts on an object, while collecting information about all degrees of freedom of a dynamic uncontrolled object. Such an input signal having an infinite spectrum is white noise. The methods for finding the structure of the operator and the estimation of its parameters for the linear case, as well as the method for identifying the model of a multidimensional dynamic system, are considered. Methods have been developed for finding a model of a dynamic system, which is defined only by the output signal, and determining the characteristics of a dynamic system, in contrast to the known processes described by the problems of identification, control and measurement.

An illustrated sequence of construction of the model of the linear dynamic system operator as a solution to the inverse dynamics problem: to determine the structure of the operator in the state space based on the output signal, which allows to develop computational algorithms for real dynamical systems in a linear approximation.

Keywords: dynamical system, operator, inverse problem, linear space, vector time series, Hankel matrices, decomposability of a matrix, rank of a matrix, basis of space.

Постановка проблеми

В роботі розглядається вирішення задачі аналізу структури динамічного об'єкту: з урахуванням стохастичного підходу до аналізу вихідних сигналів та без урахування випадкових складових вихідного сигналу на підставі лінійних відображень множини лінійних просторів, тобто теоретико-множинний підхід.

Поставлена задача знаходження структури динамічного об'єкта за вихідним сигналом досліджувалася методом факторизації кореляційної матриці вихідного сигналу [1].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Розглянуті раніше методи відносяться до обернених задач дослідження динамічних систем, сутність яких заключається в тому, що вихідний спостережуваний сигнал являється рішенням динамічного оператора об'єкта, а структура самого оператора невідома. При цьому є деякі припущення про його клас: лінійний, нелінійний диференціальний і диференціальний в частинних похідних та інші. [2-7].

Евристичний підхід ґрунтується на тому, що вхідний сигнал діє на об'єкт, при цьому здійснюється збір інформації про всі ступені свободи динамічного некерованого об'єкта. Таким вхідним сигналом, що має нескінченний спектр, є білий шум. Розглянуто методику знаходження структури оператора і оцінку його параметрів для лінійного випадку та метод ідентифікації моделі багатомірної динамічної системи.

Мета дослідження

Для визначення коефіцієнтів системи диференціальних рівнянь, що описують динамічну систему, необхідно отримати таке рівняння, яке не залежить від вхідного сигналу.

Поставлена задача полягає в знаходженні моделі динамічного об'єкта за результатами вимірювань його вихідних сигналів, які після їх обробки представляють векторні часові ряди. В якості елемента класу моделей, що пояснює отриману множину спостережень і є найменшою серед можливих, потрібно знайти найбільш сильну неспростовану модель.

Викладення основного матеріалу дослідження

Модель опису структури оператора динамічних систем повинна відповідати таким вимогам:

- бути простою;
- містити мало довільних або уточнюючих елементів;

- узгоджуватися з усіма існуючими спостереженнями і пояснювати їх в рамках теорії лінійних динамічних систем;
- давати детальний передбачення результатів майбутніх спостережень, які можуть спростувати цю модель або довести її хибність, якщо передбачення, зроблені за цією моделлю, не підтверджуються.

Після введення основних властивостей лінійних операторів уточнимо фундаментальне поняття в теорії динамічних систем – поняття стану, яке надзвичайно важливо з практичної точки зору в теорії прийняття рішень і обробки сигналів.

Система з простором станів являє собою четвірку

$$\Sigma_i = \{T, W, X, \mathcal{B}_i\}, \quad (1)$$

де $T \subset R$ – множина моментів часу;
 W – алфавіт зовнішніх сигналів;
 X – простір станів;
 $\mathcal{B}_i \subset (W \times X)^T$ – множина внутрішніх станів.

Припускається, що \mathcal{B}_i задовольняє аксіомі стану

$$\{(\vec{w}_k, \vec{x}_k) \in \mathcal{B}_i, k = 1, 2, t_0 \in T, \vec{x}_1(t_0) = \vec{x}_2(t_0)\} \rightarrow \{\vec{w}_1, \vec{x}_1 \wedge_{t_0} (\vec{w}_2, \vec{x}_2) \in \mathcal{B}_i\}, \quad (2)$$

де \vec{w}_k – вектори вихідних сигналів динамічного об'єкта;
 \wedge – знак конкатенації.

З аксіоми стану випливає, що будь-яка траєкторія, що приходить в деякий стан, сумісна з будь-якою іншою траєкторією, що виходить з цього ж самого стану. Інакше, в теоретико-множинному сенсі для заданого в даний момент стану минуле і майбутнє умовно незалежні, тобто цей стан відображує минуле і майбутнє поведінки системи [8-10]. Розглянуто систему

$$\begin{aligned} \sigma \vec{x} &= \mathbf{A}' \vec{x} + \mathbf{B}' \vec{u}, \\ \vec{w} &= \mathbf{C}' \vec{x} + \mathbf{D}' \vec{u}. \end{aligned} \quad (3)$$

Вона визначає динамічну систему з простором станів, в якій σ – оператор зсуву в часі, $T = Z_+$ або Z_- множина моментів часу (дискретне або безперервне), $Z \geq 0$.

Виходячи з спостережуваного векторного часового ряду визначено алгоритми обчислення найсильнішою неспростованої моделі. Для вирішення цього розроблена теорія реалізації на основі усіченої поведінки [9, 12, 13]. Поставлена задача знайти для отриманого в результаті обробки спостережень за динамічним об'єктом q -мірного часового ряду $\vec{w}(t_0), \vec{w}(t_0 + 1), \dots, \vec{w}(t_1)$ ($-\infty \leq t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$) з $\vec{w}(t) \in R^q$ динамічну модель об'єкта, що пояснює наведенні спостереження.

У загальному випадку, методичний підхід до побудови алгоритмів, що адекватно представляють модель і враховують раніше заявлені вимоги до лінійності, упорядкованості, законам збереження, розкладеності операторів, полягає в завданні деякого певного набору рівнянь, що містять мінімальний набір параметрів з мінімальним набором обмежень.

Клас моделей \mathcal{M} складається з усіх лінійних підпросторів векторного простору вихідних параметрів динамічного об'єкта. Конкретна модель \mathbf{M}_1 заданого явища (функціонування динамічного об'єкта) вважатимемо сильнішою ніж модель \mathbf{M}_2 ,

якщо $M_1 \subset M_2$. При цьому будемо розглядати тільки прямі вимірювання атрибутів самого явища. Припустимо, що явище S потрібно моделювати на основі вимірювань $Z \subset S$ в заданому класі моделей $\mathcal{M} \subset 2S$. Перевагу у виборі моделі з \mathcal{M} віддамо тієї, що не суперечить Z і дає найкращі передбачення. Вона є найбільш сильною неспростованою моделлю. З математичної точки зору, вона неможорється в \mathcal{M} , якщо є імплікація $\{Z \subset M' \subset \mathcal{M} \text{ та } M' \subset M\} \rightarrow \{M' \equiv M\}$.

Модель M_Z^* є найбільш сильною з класу моделей \mathcal{M} , заснованої на вимірюваннях Z , якщо

$$Z \subset M_Z^* \in \mathcal{M} \text{ та } \{Z \subset M \in \mathcal{M}\} \rightarrow \{M_Z^* \subset M\}. \quad (4)$$

Це можливо, коли сімейство моделей $\mathcal{M} \subset 2S$ має властивість перетину, тобто

$$\{\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}\} \rightarrow \left\{ \bigcap_{M \in \mathcal{M}'} M \subset \mathcal{M} \right\}, \quad (5)$$

і що для кожного $Z \in \mathcal{L} \in 2S$ існує найбільш сильна неспростована модель M_Z^* в класі моделей \mathcal{M} , яка ґрунтується на вимірюваннях Z [10]. Це виходить з наступного обґрунтування.

При $T = Z_+$ або Z розглянемо систему $\Sigma = \{T, R^q, \mathcal{B}\}$. Тоді поліноміальна матриця R , така, що $\Sigma = \Sigma(R)$, існує в тому і тільки в тому випадку, коли система Σ лінійна, стаціонарна і повна, тобто в тому і тільки в тому випадку, коли її поведінка \mathcal{B} лінійна, інваріантна щодо зсуву і замкнена в топології поточної збіжності простору $(R^q)^T$ (простору q -мірних часових рядів). Це сама визначена з можливих характеристик цього класу систем: потрібно, щоб поведінка $\mathcal{B} \subset (R^q)^T$ було лінійним, інваріантним відносно зсуву ($\sigma\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$, якщо $T = Z_+$ та $\sigma\mathcal{B} = \mathcal{B}$ для Z), і повним в топології поточної збіжності, де σ – оператор зсуву.

Після наведеного обґрунтування можна приступити до вирішення поставленої задачі знаходження моделі динамічного об'єкта за його вихідними сигналами [10, 12].

Вихідні сигнали динамічного об'єкта $\vec{w}(t)$ після обробки вимірювальною системою будуть багатомірними часовими рядами: $\vec{w}(0), \vec{w}(1), \dots, \vec{w}(t)$ у 1-ому випадку дискретного часу $T = Z_+$ та $\vec{w}(-1), \vec{w}(0), \vec{w}(1), \dots, \vec{w}(t)$ у 2-ому випадку $T = Z$.

На їх підставі для структурного упорядкування інформації побудуємо нескінченні векторні ганкелеві матриці [8, 10, 11].

$$\mathcal{H}_1(\vec{w}) := \begin{pmatrix} \vec{w}(0) & \vec{w}(1) & \dots & \vec{w}(t') & \dots \\ \vec{w}(1) & \vec{w}(2) & \dots & \vec{w}(t'+1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \vec{w}(t) & \vec{w}(t+1) & \dots & \vec{w}(t+t') & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (6)$$

(випадок $T = Z_+$)

або у випадку $T = Z$

$$\mathcal{H}_2(\bar{w}) := \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \bar{w}(-1) & \bar{w}(0) & \bar{w}(1) & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{w}(t') & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bar{w}(0) & \bar{w}(1) & \bar{w}(2) & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{w}(t'+1) & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bar{w}(t-1) & \bar{w}(t) & \bar{w}(t+1) & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{w}(t+t') & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}. \quad (7)$$

На підставі (6), (7) побудуємо розбиту на блоки (нескінченну в чотирьох напрямках) ганкелеву матрицю [8, 13] для ряду $\bar{w}(t): Z \rightarrow R^q$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{H}_-(\bar{w}) \\ \hline \mathcal{H}_+(\bar{w}) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \dots & \bar{w}(-t-1) & \bar{w}(-t) & \dots & \bar{w}(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \bar{w}(t-2) & \bar{w}(-1) & \dots & \bar{w}(t'-1) & \dots \\ \dots & \bar{w}(-1) & \bar{w}(1) & \dots & \bar{w}(t') & \dots \\ \hline \dots & \bar{w}(0) & \bar{w}(1) & \dots & \bar{w}(t'+1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \dots & \bar{w}(t-1) & \bar{w}(t) & \dots & \bar{w}(t+t') & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Введемо поняття відносного рангу по рядках $\text{rank}(\mathbf{M}_1; \mathbf{M}_2)$ розділеної на блоки нескінченної матриці (8), представивши її у вигляді

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 \\ \hline \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Спочатку припустимо, що матриця \mathbf{M} скінченна. Тоді за визначенням

$$\text{rank}(\mathbf{M}_1; \mathbf{M}_2) = \text{rank } \mathbf{M}_1 + \text{rank } \mathbf{M}_2 - \text{rank } \mathbf{M} = \text{rank } \mathbf{M} \quad (10)$$

і припустимо далі, що матриця \mathbf{M} має нескінченне число стовпців і з урахуванням формул (7) і (8) припустимо

$$\text{rank}(\mathbf{M}_1; \mathbf{M}_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{rank}(\mathbf{M}_{1,t}; \mathbf{M}_{2,t}) = \text{rank}(\tilde{\mathbf{M}}_1; \tilde{\mathbf{M}}_2). \quad (11)$$

Тут згідно [8] $\mathbf{M}_{1,t}$ позначає матрицю, отриману з \mathbf{M}_1 в результаті обмеження її по стовпцю з номером t , а $\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_1 \\ \hline \tilde{\mathbf{M}}_2 \end{pmatrix}$ – підматрицю максимального рангу відповідно \mathbf{M} .

Введене визначення очевидним чином поширюється на випадок матриці з нескінченним в обидві сторони числом стовпців. В результаті отримуємо

$$\text{rank}(\mathbf{M}_1; \mathbf{M}_2) = \sup_{t \rightarrow \infty} \text{rank}(\mathbf{M}_1^{t'}; \mathbf{M}_2^{t'}), \quad (12)$$

тобто (12) є верхньою межею відносно рангу за всіма підматрицями \mathbf{M}_1 та \mathbf{M}_2 , що одержані в результаті викреслювання будь-якого числа рядків в \mathbf{M}_1 і \mathbf{M}_2 .

Доказано в [8, 10, 11], що $\text{rank}(\mathcal{H}_-(\vec{w}); \mathcal{H}_+(\vec{w})) < \infty$ і він дорівнює розмірності мінімального представлення з простором станів 1 найбільш сильною неспростованою (AR)-моделі $\mathcal{B}(R_w^*)$ часового ряду \vec{w} (тут (AR) – авторегресійна модель). Для отриманого в результаті обробки спостережуваного часового ряду $\vec{w}: Z \rightarrow R^q$ та побудованої для системи (3) матриці $\mathbf{M} \in R^{(n+q) \times (n+m)}$, яка задає відображення

$$\mathbf{M}: \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i) \\ \vec{u}(t_i) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{x}(t_i + 1) \\ \vec{w}(t_i) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

де $\vec{x}(t)$ – вектор стану;
 $\vec{u}(t)$ – вектор управління;
 $\vec{w}(t)$ – спостережуваний часовий ряд.
 Розбивши матрицю \mathbf{M} (13) на блоки

$$\mathbf{M} := \begin{pmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{C}' & \mathbf{D}' \end{pmatrix}, \quad (14)$$

так, що $\mathbf{A}' = R^{n \times n}$, $\mathbf{B}' = R^{n \times m}$, $\mathbf{C}' = R^{q \times n}$ і $\mathbf{D}' = R^{q \times m}$, отримаємо модель динамічного оператора $\Sigma(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}')$, яка є найбільш сильною неспростованою моделлю з мінімальним простором станів і мінімальним числом входів m для часового ряду $\vec{w}(t)$ [10, 14, 15]. Обґрунтуємо ці рішення, наділивши лінійні оператори необхідними додатковими властивостями: сюр'єктивною відповідністю (відображенням) між множинами, при якому кожен елемент однієї множини відповідає деякому елементу іншої множини і бієктивним відображенням – взаємно однозначною відповідністю, що є одночасно однозначною, ін'єктивною (при якому різним елементам з першої множини відповідають різні елементи іншої), і сюр'єктивною [10].

Висновки

Розроблені методи знаходження моделі динамічної системи, що задається тільки вихідним сигналом, та визначення характеристик динамічної системи на відміну від відомих процесів, описаних задачами ідентифікації, управління і вимірювання.

Пропонований метод моделювання оператора динамічної системи на основі властивостей лінійних операторів та упорядкування експериментальних даних за допомогою ганкелевих квадратичних форм і ганкелевих матриць, що дозволяє знайти рішення зворотних задач динаміки на теоретико-множинному рівні. Розроблена оптимальної точна модель (без урахування перешкод), а саме найбільш сильна неспростована модель в класі лінійних систем.

Проілюстрована послідовність побудови моделі оператора лінійної динамічної системи як вирішення зворотної задачі динаміки: по вихідному сигналу визначити структуру оператора в просторі станів, яка дозволяє розробляти обчислювальні алгоритми для реальних динамічних систем в лінійному наближенні.

Список використаної літератури

1. Марасанов В.В., Забытовская О.И., Дымова А.О. Прогнозирование структуры динамических систем. *Вестник ХНТУ*. 2012. № 1 (44). С. 292–302.

2. Борухов В.Т., Гайшун И.В., Тимошпольский В.И. Структурные свойства динамических систем и обратные задачи математической физики. Минск: Беларус.навука, 2009. 174 с.
3. Гроп Д. Методы идентификации систем. Москва: Мир, 1979. 302 с.
4. Калинин В.Н., Резников Б.А. Теория систем и управления (Структурно-математический подход). Ленинград: ВИКИ им. А.Ф. Можайского, 1978. 417 с.
5. Неймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. Москва: Наука, 1969. 526 с.
6. Портер У. Современные основания общей теории систем. Москва: Наука, 1971. 556 с.
7. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Москва: Радио и связь, 1993. 278 с.
8. Виллемс Ян К. От временного ряда к линейной системе. Теория систем. Математические методы и моделирование. Сборник статей. Москва: Мир, 1989. 384 с.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 560 с.
10. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. Москва: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
11. Марасанов В.В., Димова Г.О. Евристичні підходи до аналізу динамічних об'єктів по вихідним сигналам. *Проблеми інформаційних технологій*. 2017. №1(022). С. 134-141.
12. Директор С., Рорер Р. Введение в теорию систем. Москва: Мир, 1974. 464 с.
13. Пантелеев А.В., Бортакровский А.С. Теория управления в примерах и задачах: Учебное пособие. Москва: Высшая школа, 2003. 583 с.
14. Сейдж Э.П., Мелса Дж. Л. Идентификация систем управления. Москва: Наука, 1974. 284 с.

References

1. Marasanov, V. V., Zabytovskaya, O. I., & Dymova, A. O. (2012) Prediction of the structure of dynamic systems. *Bulletin of KNTU*. 1 (44), 292–302.
2. Borukhov, V. T., Gaishun, I. V., & Timoshpolsky, V. I. (2009) Structural properties of dynamic systems and inverse problems of mathematical physics. Minsk: Belarus.nauka.
3. Grop, D. (1979) Methods of system identification. Moscow: World.
4. Kalinin, V. N., & Reznikov, B. A. (1978) Systems Theory and Management (Structural and Mathematical Approach). Leningrad: VIKI them. A.F. Mozhaisky.
5. Neymark, M. A. (1969) Linear differential operators. Moscow: Science.
6. Porter, U. (1971) Modern bases of the general theory of systems. Moscow: Science.
7. Saaty, T. (1993) Decision Making. Hierarchy analysis method. Moscow: Radio and Communication.
8. Willems, Jan K. (1989) From a time series to a linear system. System Theory. Mathematical methods and modeling. Digest of articles. Moscow: World.
9. Gantmakher, F. R. (2004) Theory of matrices. Moscow: FIZMATLIT.
10. Kalman, R., Falb, P., & Arbib, M. (2004) Essays on the mathematical theory of systems. Moscow: Editorial URSS.
11. Marasanov, V. V., & Dimova, G. O. (2017) Euristic approaches to the analysis of dynamical obescans on a series of signals. *Problems and Information Technologies*. 1 (022), 134–141.
12. Director, S., & Rohrer, R. (1974) Introduction to systems theory. Moscow: World.
13. Panteleev, A. V., & Bortakovsky, A. S. (2003) Management Theory in Examples and Tasks: Tutorial. Moscow: Higher School.
14. Sage, E. P., & Melsa J. L. (1974) Identification of control systems. Moscow: Science.